Додаток до листа
Інституту інноваційних технологій
і змісту освіти МОН України
від 31.05.2013 №14.1/10-1635

Міністерство освіти і науки України
Інститут інноваційних технологій і змісту освіти

XVI ВСЕУКРАЇНСЬКИЙ ТУРНІР ЮНИХ МАТЕМАТИКІВ ІМЕНІ ПРОФЕСОРА М.Й. ЯДРЕНКА

Завдання для відбірних етапів турніру*

Дорогі друзі — юні шанувальники математики! Деякі із задач, що пропонуються нижче, досить складні і не обов'язково повинні бути розв'язані повністю. Оцінюватися будуть і окремі часткові просування, розбір суттєвих окремих випадків тощо. У певних ситуаціях вашій команді буде варто поставити й розв'язати аналогічну, але, можливо, більш просту задачу. Усе це є важливим елементом турнірної «боротьби», оскільки дає підстави для цікавих і корисних наукових дискусій. Задачі, які видаються занадто простими, варто спробувати узагальнити: це завжди високо оцінюється журі Турніру (нехтування ж можливостями узагальнення інколи призводить до втрати балів). Бажаємо вам успішної підготовки до Турніру!

1. «Спрощення виразу»

Нехай задано многочлен $Q(x)$ n-го степеня з дійсними коефіцієнтами і набір дійсних чисел $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_{n+1}$. Спростіть вираз

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \, Q(x+\lambda_i),$$

де $\alpha_i = \prod\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n+1} \left(\lambda_i - \lambda_j\right)^{-1}$, $1 \leqslant i \leqslant n+1$.

*Для проведення міжшкільних, районних, міських та обласних етапів турніру відповідні журі й оргкомітети можуть частково змінювати запропонований перелік задач.

2. «Нерівність з параметром»

Знайдіть усі такі дійсні значення параметра a, для яких нерівність

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}>\frac{a}{x+y}+\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}}$$

має місце для всіх $x>0$ і $y>0$.

3. «Туристичний похід»

Туристичний похід тривав T годин. Туристи вирушили з табору і спочатку рухалися горизонтальною ділянкою шляху. Потім подолали підйом, а після одногодинного привалу цим же шляхом повернулися до табору. Відомо, що горизонтальною ділянкою вони рухалися зі швидкістю u км/год, на підйомі — зі швидкістю v км/год і на спуску — зі швидкістю w км/год. Знайдіть необхідні та достатні умови, за яких загальна відстань, пройдена туристами під час походу, визначається однозначно.

4. «Пірати, скарб та математика»

Нехай N і k — задані натуральні числа. N піратів знайшли скарб, що складався з однакових золотих монет, і вирішили розподілити його між собою, визначивши жеребкуванням порядок, за яким вони підходитимуть до скрині зі скарбом. У встановленій послідовності пірати один за одним підходили до скрині, і кожен з них брав собі одну монету й після цього ще k-ту частину від решти монет. Коли в такий спосіб узяв свою долю останній з піратів, то з’ясувалось, що залишилась певна кількість монет, яку пірати змогли розділити між собою порівну.

4.1. Для $N = 2027$ та $k = 2013$ знайдіть найменшу кількість монет у скарбі, за якої описаний поділ був би можливим.

4.2. Дослідіть величину $S(N,\ k)$ — найменшу кількість монет у скарбі, за якої описаний поділ був би можливим.

5. «Многочлен»

5.1. Чи існує такий многочлен $P(x)$ з дійсними коефіцієнтами, що для всіх $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність

$$P\left(x+x^2\right)=x+x^2+\ldots+x^{2013}+x^{2014}?$$

5.2. Чи існує такий многочлен $P(x)$ з дійсними коефіцієнтами, що для деяких дійсних чисел a і b для всіх $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність

$$P\left(x+x^2+x^3\right)=x+x^2+x^3+\ldots+x^{2010}+ax^{2011}+bx^{2012}+x^{2013}?$$

6. «Геометричне місце точок»

Дано коло ω, на якому позначаються точки A, B і C. Нехай BF і CE — висоти трикутника ABC, M — середина сторони AC. Знайдіть геометричне місце точок перетину прямих BF і ME для всіляких положень точки A на колі ω.

7. «Сума степенів та зростання послідовності»

Знайдіть усі такі трійки додатних дійсних чисел a, b і c, для яких послідовність $u_n = a^n + b^n + c^n$, $n \geqslant 1$, зростає.

8. «Функціональне рівняння»

Знайдіть усі такі монотонні на відрізку $[1;\ 2]$ функції $f\colon\ [0;\ +\infty) \to \mathbb{R}$, що для довільних дійсних $r \geqslant 0$ і $\varphi \in \left[\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{4}\right]$ виконується рівність

$$f(r\cos\varphi) + f(r\sin\varphi) = f(r).$$

9. «Коло шести точок»

Дано трикутник PQR, вписане коло ω якого дотикається до його сторін QR, RP і PQ в точках A, B і C відповідно, причому $AB^2 + AC^2 = 2BC^2$. Доведіть, що точка перетину відрізків PA, QB і RC, центр кола ω, точка перетину медіан трикутника ABC, точка A та середини відрізків AC і AB лежать на одному колі.

10. «Нова мова дикунів»

Нехай $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$ — алфавіт дикунів племені Мумбо, а $b_1 < < b_2 < \ldots < b_m$ — алфавіт дикунів племені Юмбо (запис «$x < y$» означає, що літера x передує літері y). Ці алфавіти (позначимо їх через A і B відповідно) не мають жодної спільної літери. Обидва племені вирішили об'єднатись та створити нову мову. Словом мови племені Мумбо-Юмбо вважатиметься послідовність літер $c_1 c_2 \ldots c_n$, $c_i \in A \cup B$, $1 \leqslant i \leqslant n$, яка задовольняє такі чотири умови:

а) якщо для $i < j$ $c_i \in A$ і $c_j \in A$, то $c_i < c_j$ або $c_i = c_j$;
б) якщо для $i < j$ $c_i \in B$ і $c_j \in B$, то $c_i < c_j$ або $c_i = c_j$;
в) $c_i \neq c_{i+1}$ для всіх i, $1 \leqslant i \leqslant n-1$;
г) $c_i \neq c_{i+2}$ для всіх i, $1 \leqslant i \leqslant n-2$.

Яку найбільшу довжину можуть мати слова нової мови?

11. «Прості числа й точні квадрати»

Знайдіть усі такі прості числа p, для яких $37p^2 - 47p + 4$ є квадратом натурального числа.

12. «Числовий автомат»

Числовий автомат «ТЮМ-XVI» може виконувати такі операції з натуральними числами: 1) відняти від даного числа 3 (якщо воно більше за 3); 2) помножити дане число на 3; 3) розділити дане число на 3 (якщо воно ділиться на 3 без остачі).

12.1. За яку найменшу кількість операцій можна з числа 82 отримати число 81?

12.2. За яку найменшу кількість операцій можна з числа 81 отримати число 82?

12.3. Аналогічне питання щодо отримання числа n із числа m.

13. «Рекурентне співвідношення та подільність»

Розглянемо послідовність $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$: $a_1 = 0$, $a_2 = \alpha$, $a_n = \lambda a_{n-1} + \mu a_{n-2}$, $n \geqslant 3$. Чи існують такі натуральні числа α, λ і μ, що для кожного простого $p > 2$ число a_{p^2} ділиться без остачі на p?

14. «Планарні графи»

Знайдіть найменше k, для якого довільний планарний простий скінченний граф можна було б орієнтувати так, щоб півстепінь виходу кожної з його вершин (тобто кількість «стрілок», що виходять з цієї вершини) не перевищувала k.

15. «Конкурентність трьох прямих»

Усередині гострокутного трикутника ABC відмітили точку O так, що $\angle AOB = 90°$, на стороні BC — таку точку M, що $\angle COM = 90°$, а на відрізку BO — таку точку N, що $\angle OMN = 90°$. Нехай P — точка перетину прямих AM і CN, а Q — така точка на стороні AB, що $\angle POQ = 90°$. Доведіть, що прямі AN, CO і MQ перетинаються в одній точці.

16. «Тригонометрія та многочлени»

Знайдіть усі $k \in \mathbb{Z}$, для кожного з яких існує такий многочлен від трьох змінних $P(u, v, w)$ з дійсними коефіцієнтами, що для всіх $x \in \mathbb{R}$ і $y \in \mathbb{R}$ виконується рівність

$$\cos(20x + 13y) = P(\cos x,\ \cos y,\ \cos(x + ky)).$$

17. «Ортоцентричний тетраедр»

Через точку перетину медіан кожної з граней тетраедра перпендикулярно до цієї грані проведено пряму. Доведіть, що всі ці чотири прямі перетинаються в одній точці тоді й тільки тоді, коли перетинаються в одній точці чотири прямі, які містять висоти цього тетраедра.

18. «Кола на площині»

Визначте, яку найбільшу кількість кіл одиничного радіуса можна розташувати на площині так, щоб виконувались такі дві умови:

а) відстань між центрами будь-яких двох кіл не більша за 10;
б) для кожного з кіл знайдеться така пряма, що це коло лежить по один бік від неї, а решта кіл — по інший.

19. «Дві функції»

Знайдіть усі множини $A \subset [0;\ 1]$, для кожної з яких існують функції $f\colon [0;\ 1] \to [0;\ 1]$ і $g\colon [0;\ 1] \to [0;\ 1]$, що задовольняють такі умови:

а) g — монотонна функція, множина значень якої — відрізок $[0;\ 1]$;
б) для всіх $u \in [0;\ 1]$ і $v \in [0;\ 1]$ виконується нерівність $|f(u) - f(v)| \leqslant$ $\leqslant |g(u) - g(v)|$;
в) $A = \{x \in [0;\ 1] :\ f(x) = g(x)\}$.

20. «Гральний кубик та теорія ймовірностей»

Математик проводить підкидання кубика, на двох гранях якого записані одиниці, на двох гранях — двійки і на двох — трійки.

20.1. Кубик підкинули n разів. Визначте ймовірність того, що в процесі підкидання кількість випадань одиниці завжди буде не менше, ніж кількість випадань двійки.

20.2. Кубик підкинули n разів. Визначте ймовірність того, що в процесі підкидання кількість випадань одиниці завжди буде не менше, ніж кількість випадань двійки, і не менше, ніж кількість випадань трійки.

20.3. Кубик підкидають, доки кількість випадань одиниці стане не менше, ніж кількість випадань двійки, і не менше, ніж кількість випадань трійки. Визначте математичне сподівання кількості підкидань.

21. «Найбільше значення»

Нехай $n \geqslant 2$. Знайдіть найбільше значення виразу

$$\frac{\sqrt{a_1^2+1}+\sqrt{a_2^2+1}+\ldots+\sqrt{a_n^2+1}}{a_1+a_2+\ldots+a_n}$$

для додатних чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, які задовольняють умову $a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = 1$.

Деякі позначення, які використовуються в умовах задач:

$\sum_{i=1}^{n} a_i$ — сума чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$;

$\prod_{i=1}^{n} a_i$ — добуток чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$;

$f : X \to Y$ — функція f, яка визначена на всій множині X та набуває значень у множині Y.

Список літератури з теорії графів:

Лекции по теории графов/ *Емеличев В.А.* и др. — М.: Наука, 1990;

Оре О. Теория графов. — М.: Наука, 1980;

Уилсон Р. Введение в теорию графов. — М.: Мир, 1977;

Мельников О.И. Занимательные задачи по теории графов. — Минск: Тетра-Системс, 2001;

Дрозд Ю.А. Дискретна математика. — К.: КНУ, 2004 `http://www.imath.kiev.ua/~drozd/Discrete.pdf`;

Карнаух Т.О., Ставровський А.Б. Теорія графів у задачах. — К.: ВПЦ «Київський університет», 2004 `http://www.cyb.univ.kiev.ua/library/books/karnaukh-23.pdf`.

Список літератури з теорії ймовірностей та комбінаторики:

Феллер В. Введение в теорию вероятностей и её приложения. — Т. 1. — М.: Мир, 1984;

Коваленко И.Н., Гнеденко Б.В. Теория вероятностей. — К.: Вища школа, 1989;

Єжов І.І., Скороход А.В., Ядренко М.Й. Елементи комбінаторики. — К.: Вища школа, 1972;

Ямненко Р.Є. Дискретна математика. — К.: Четверта хвиля, 2010 `http://probability.univ.kiev.ua/userfiles/yamnenko/manual_DM.pdf`.

* * *

Матеріали для проведення відбірних етапів турніру підготували:

В.М. Журавльов (Росія), А.І. Казмерчук, О.Г. Кукуш, О.О. Курченко, І.М. Мітельман, М.О. Перестюк, К.В. Рабець, В.М. Радченко, М.М. Рожкова, А.В. Руссєв, П.І. Самовол (Ізраїль), Р.В. Скуратовський, О.К. Толпиго, І.В. Федак, В.Д. Федачківський, Г.М. Шевченко, В.Г. Юрашев, В.А. Ясінський.